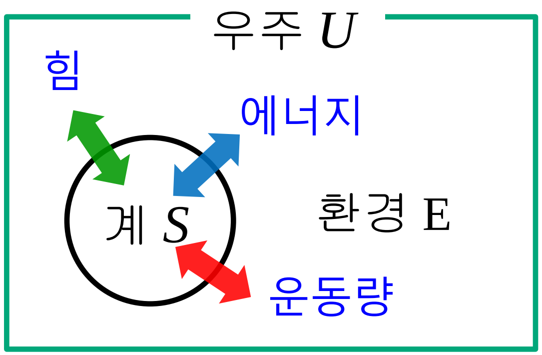
6장 계의 에너지
(Energy of a System)

계와 환경(System and Environment)

▪ 계 모형에서, 우주의 (작은) 한 부분, 즉 계(system)에 대해 관심을 집중하고 그 계를 제외한 우주의 나머지 부분에 대한 구체적인 사항은 무시한다.

▪ 유효한 계

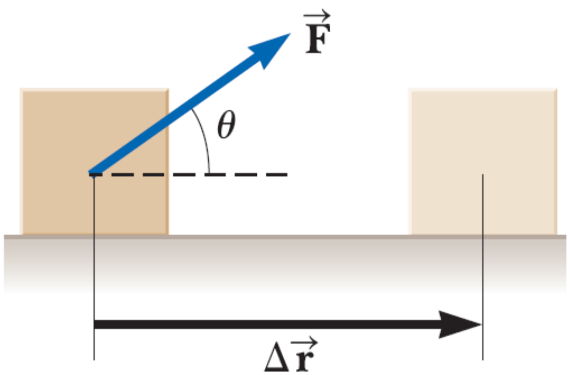
- 하나의 물체 또는 입자
- 물체나 입자들의 집합
- 공간의 일부 영역 (예: 자동차 엔진의 실린더 내부)
- 크기와 모양이 변할 수 있는 것(예: 고무공처럼 벽에 부딪치면 변형되는 것)



▪ 주어진 문제에서 특정한 계가 무엇이든 간에, 계의 경계(system boundary)라는 가상의 면(꼭 물리적인 면과 동일할 필요는 없다)이 있는데, 이 면은 우주를 계(system)와 그 계를 둘러싼 환경(environment) 또는 외부로 분리한다.

▪ 계의 에너지 또는 운동량은 오직 외부와의 상호작용에 의해서만 증가 또는 감소할 뿐이며, 계 내부에서의 상호작용에 의해서는 생성 또는 소멸되지 않는다.

일의 정의: 일정한 힘이 한 일



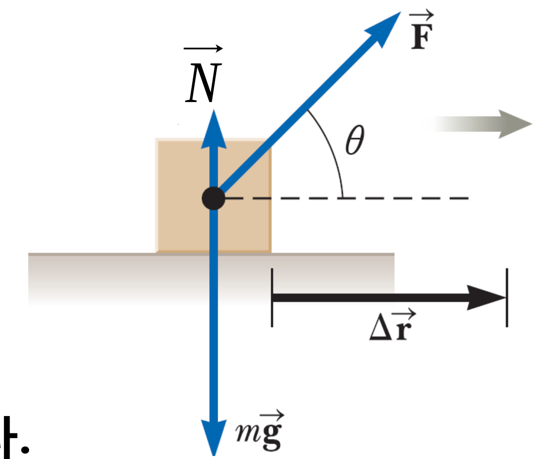
- 어떤 계에 일정한 크기의 힘 F가 한 일(work):

$$W \equiv F\Delta r\cos\theta$$
$$= \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$

(스칼라량)

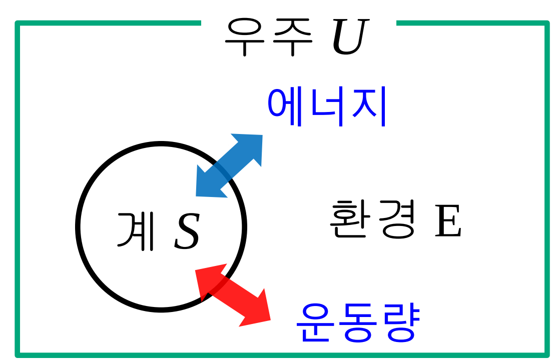
단위:

$$1J = 1N\cdot m = kg\cdot m^2 / s^2$$



- 힘이 작용하더라도 **변위가 없으면 일은 없다.**
물체가 움직이더라도 **힘과 변위가 수직이라면 그 힘이 한 일은 영이다.**

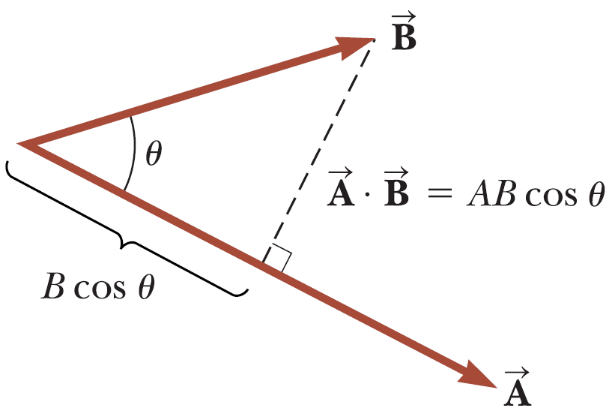
- 일은 환경과 계가 상호간에 **에너지를 주고 받는 방식**이다.
  양의 일($W > 0$) ⇒ 환경에서 계로 에너지가 전달됨
  음의 일($W < 0$) ⇒ 계에서 환경으로 에너지가 전달됨



- 계와 환경이 일을 통하여 상호작용하면 **계에 저장된 에너지는 변한다.**

두 벡터의 스칼라곱(Scalar Product)

- 임의의 두 벡터 A와 B의 스칼라곱 : $\vec{A}\cdot\vec{B} \equiv AB\cos\theta$



$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A} \qquad \text{(교환법칙)}$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C} \quad \text{(분배법칙)}$$

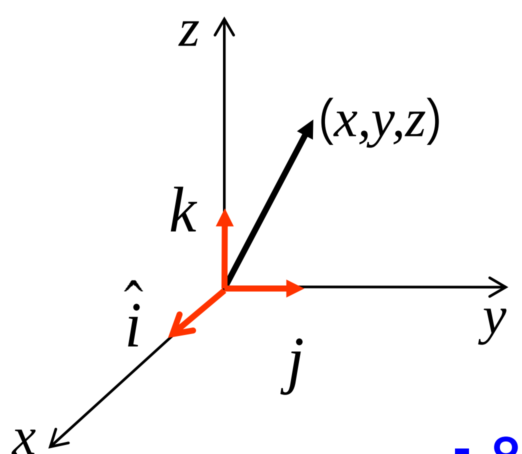
- 단위벡터 사이의 스칼라곱

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = j\cdot j = k\cdot k = 1,\ \hat{i}\cdot j = j\cdot k = k\cdot\hat{i} = 0$$

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y j + A_z k,\ \vec{B} = B_x\hat{i} + B_y j + B_z k$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2,\ |\vec{A}| = \sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2}$$

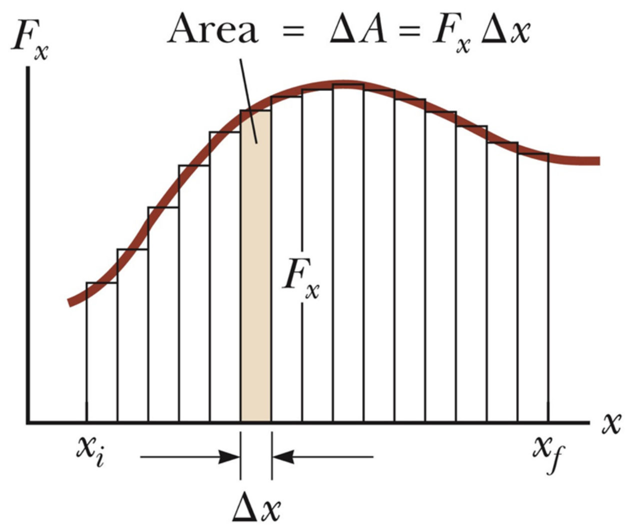


- 일정한 힘이 한 일의 표현은 $W = F\Delta r\cos\theta = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$

변하는 힘이 한 일

- **일을 하는 동안 힘이 변하는 경우로, 편의상 x-방향으로의 일만을 고려한다.**

$$\vec{F} = F_x \hat{i},\ \Delta\vec{r} = \Delta x \hat{i},\quad \Delta W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = F_x \Delta x\ (F_x = 일정)$$

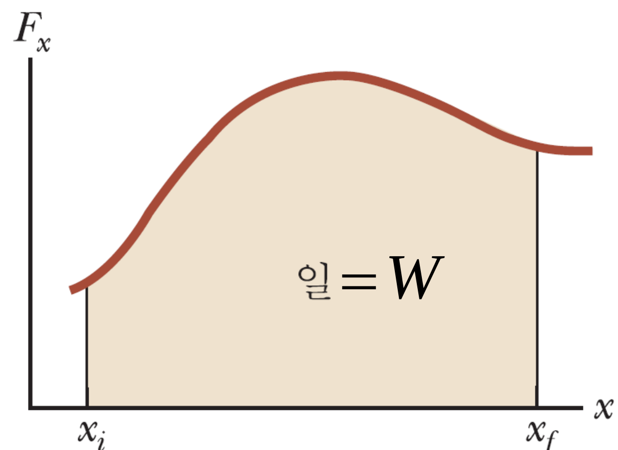


- 변위 △x 에 대해 한 일: $\Delta W \approx F_x \Delta x$

$$Then,\ W \approx \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x$$

$$As\ a\ result,\ \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

$$\boxed{W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx}$$



- **일반적으로, 변하는 힘이 한 일은**

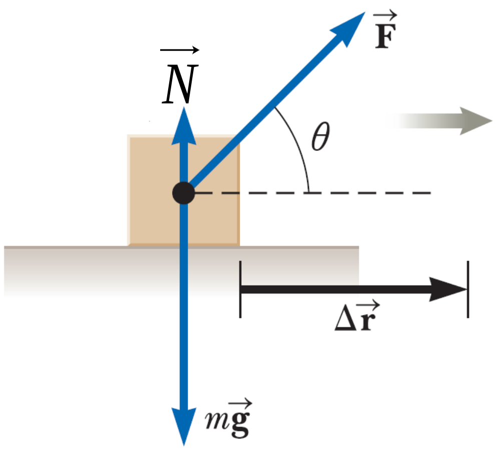
$$\boxed{W = \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z dz}$$

하나 이상의 변하는 힘들이 한 전체 일

- 입자모형의 경우 하나 이상의 힘이 계에 작용할 때, 힘들이 이 계에 대해 한 **전체 일은 알짜힘이 한 일과 같다.**

$$W_{total} = W_1 + W_2 + \ldots = \int \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \ldots$$

$$= \int \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots \right) \cdot d\vec{r}$$



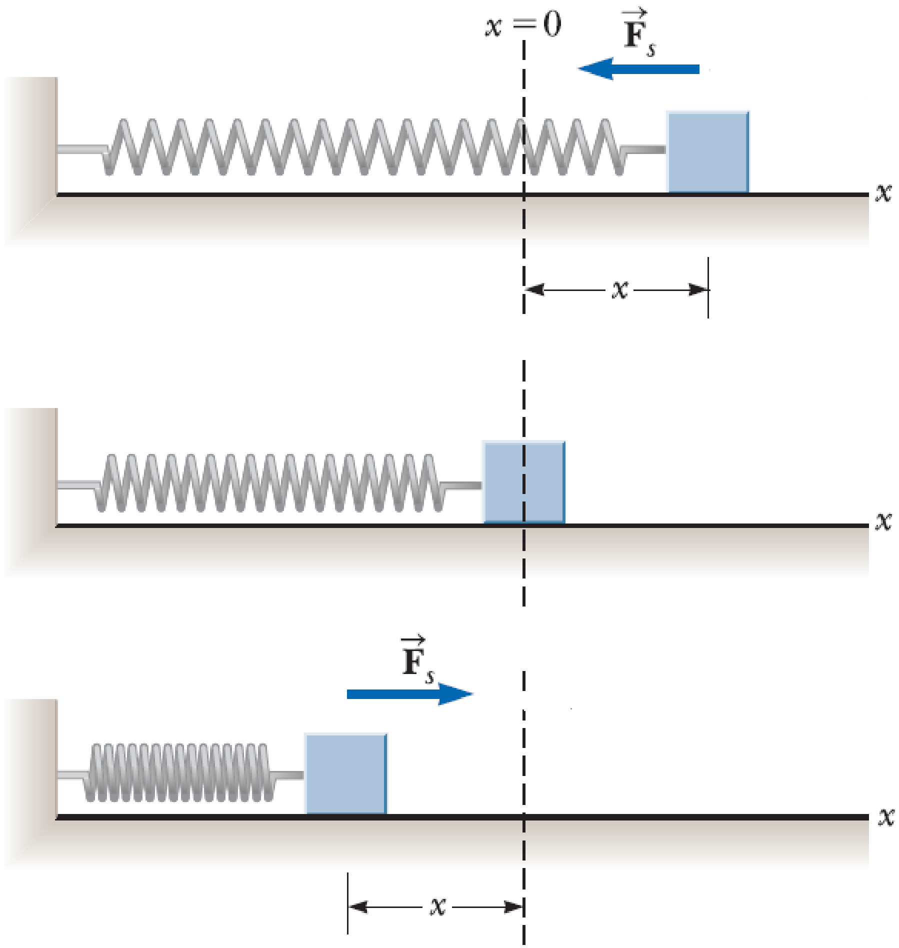
$$\sum_i W_i = \sum_i \left(\int \vec{F}_i \cdot d\vec{r} \right) = \int \left(\sum_i \vec{F}_i \right) \cdot d\vec{r}$$

- 변형 가능한 계에서는 하나 이상의 힘이 계에 작용할 때, 힘들이 계에 대해 한 **전체 일은 각각의 힘이 한 일의 합이다.**

$$W_{total} = \sum_i W_i = \sum_i \left(\int \vec{F}_i \cdot d\vec{r} \right)$$

탄성력이 한 일: 후크의 법칙

- 후크의 법칙(Hooke's Law)

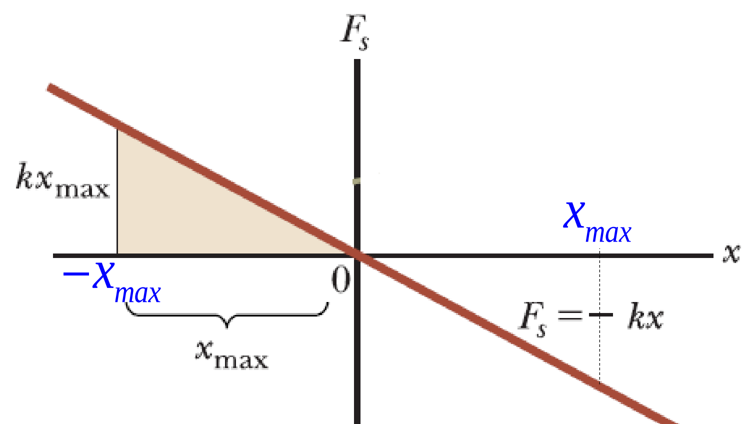


$$F_s = -k\,x$$

복원력(restoring force)

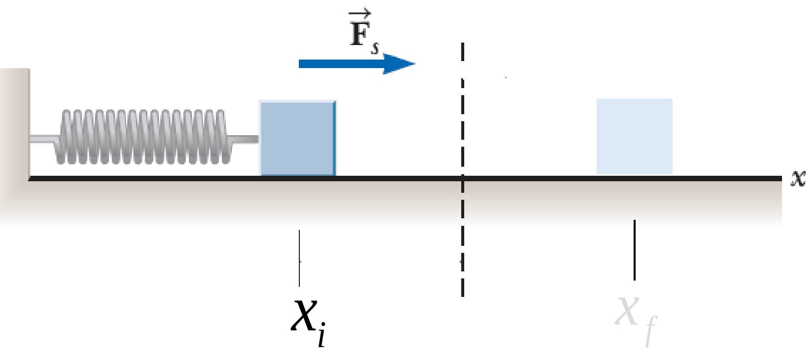
x: 평형 위치로부터의 변위
k: 스프링 상수(N/m)

$$\vec{F}_s = -kx\,\hat{i}$$



계에 용수철이 한 일과 외력이 한 일

$$\vec{F}_s = -kx\,\hat{i},\ d\vec{r} = dx\,\hat{i}$$



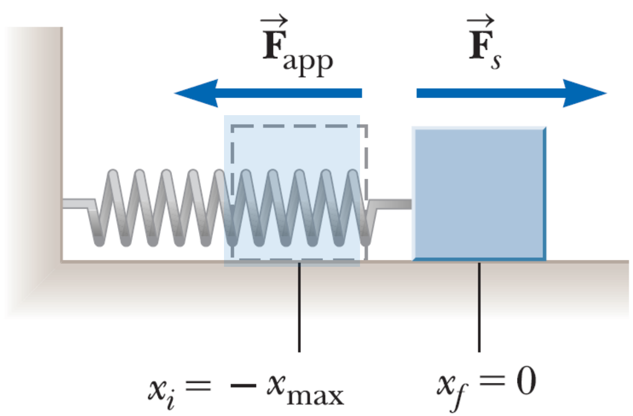
▪ X$_i$ 에서 X$_f$ 까지 물체가 움직일 때 용수철이 한 일은

$$W_s = \int_i^f \vec{F}_s \cdot d\vec{r} = \int_{x_i}^{x_f} (-kx\,\hat{i})\cdot(dx\,\hat{i})$$

$$= \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = \left[-\tfrac{1}{2}kx^2\right]_{x_i}^{x_f} = \tfrac{1}{2}kx_i^{\ 2} - \tfrac{1}{2}kx_f^{\ 2}$$

$$\boxed{W_s = \tfrac{1}{2}kx_i^{\ 2} - \tfrac{1}{2}kx_f^{\ 2}}$$

▪ 외력 F$_{ext}$ 를 가하여 물체를 X$_i$ 에서 X$_f$ 까지 가속도 없이 매우 천천히 움직이도록 한 경우 외력이 한 일은



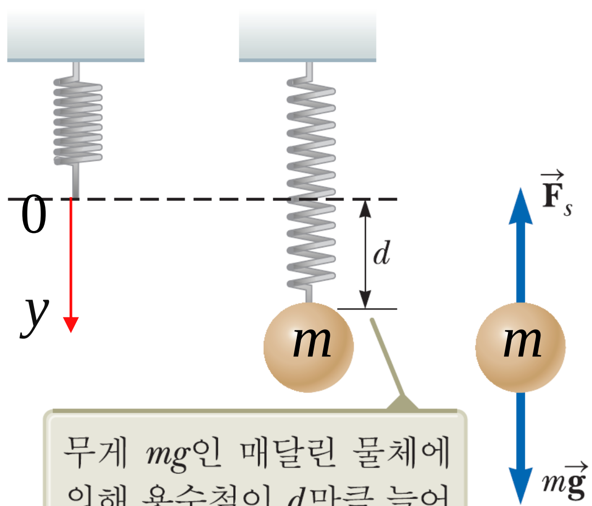
$$W_{ext} = \int_i^f \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{r}, \quad \boxed{\vec{F}_{ext} + \vec{F}_s = 0}$$

$$= -\int_i^f \vec{F}_s \cdot d\vec{r} = -W_s = \tfrac{1}{2}kx_f^2 - \tfrac{1}{2}kx_i^2$$

$$\boxed{W_{ext} = -W_s = \tfrac{1}{2}kx_f^{\ 2} - \tfrac{1}{2}kx_i^{\ 2}}$$

예제 6.5 용수철의 힘 상수 k 측정하기

- 용수철의 힘 상수를 구하는 통상적인 방법이 그림 6.11에 나타나 있다. 그림 6.11a와 같이 용수철은 연직으로 매달려 있고, 질량 m인 물체를 그 아래쪽 끝에 매단다. 용수철은 그림 6.11b와 같이 매달린 무게 mg에 의해 평형 위치로부터 거리 d 만큼 늘어난다. (A) 질량이 0.55 kg인 물체가 매달려 2.0 cm만큼 늘어났다면 용수철의 힘상수는 얼마인가? (B) 길이가 늘어나는 동안 용수철이 한 일을 구하라.



무게 mg인 매달린 물체에 의해 용수철이 d만큼 늘어난다.

- (A) 후크의 법칙에 의해 용수철의 탄성력과 중력이 평형을 이루므로

$$mg - kd = 0 \;\therefore k = mg / d$$

$$= 0.55kg \times 9.80m/s^2 / (2.0\times10^{-2} m)$$

$$= 2.7\times10^2 N/m$$

- (B) 용수철의 탄성력이 한 일은

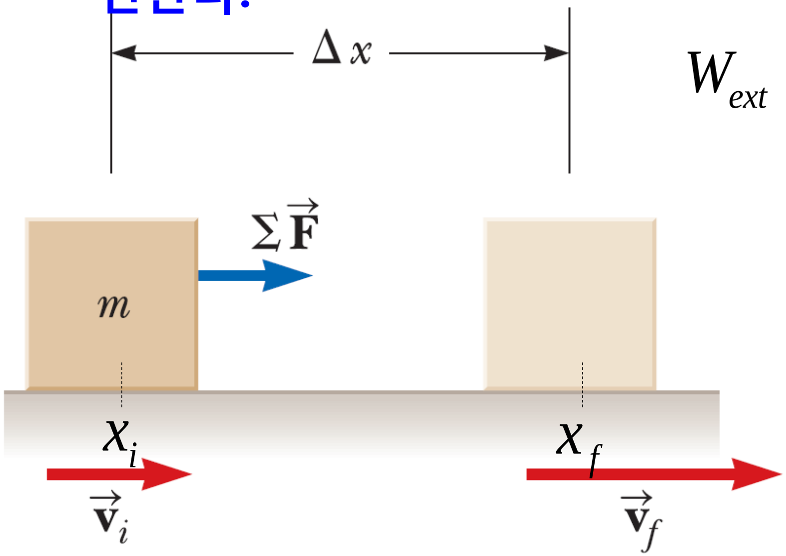
$$W_s = \tfrac{1}{2}kx_i^2 - \tfrac{1}{2}kx_f^2 = 0 - \tfrac{1}{2}kd^2$$

$$= -\tfrac{1}{2}\times2.7\times10^2(N/m)\times(2.0\times10^{-2}m)^2$$

$$= -5.4\times10^{-2} J$$

운동에너지와 일-운동에너지 정리: 단일 입자 또는 물체

- 계에 일을 한다는 것은 환경과 계가 상호간에 에너지를 주고 받는 것이다.
- 계에 일을 한 결과 중 하나는 계의 운동상태가 변화된다. 즉, 물체의 속도가 변한다.



$$W_{ext} = \int_i^f \sum \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_i}^{x_f} \sum F_x dx$$

$$= \int_{x_i}^{x_f} m a_x dx = \int_{x_i}^{x_f} m v_x \frac{dv_x}{dx} dx$$

$$= \int_{v_i}^{v_f} m v_x dv_x = \left[\frac{1}{2} m v_x^2\right]_{v_i}^{v_f}$$

$$= \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

$$d\vec{r} = dx\ \hat{i},$$

$$\sum F_x = m a_x,$$

$$a_x = dv_x / dt$$

$$= \frac{dv_x}{dx} \frac{dx}{dt}$$

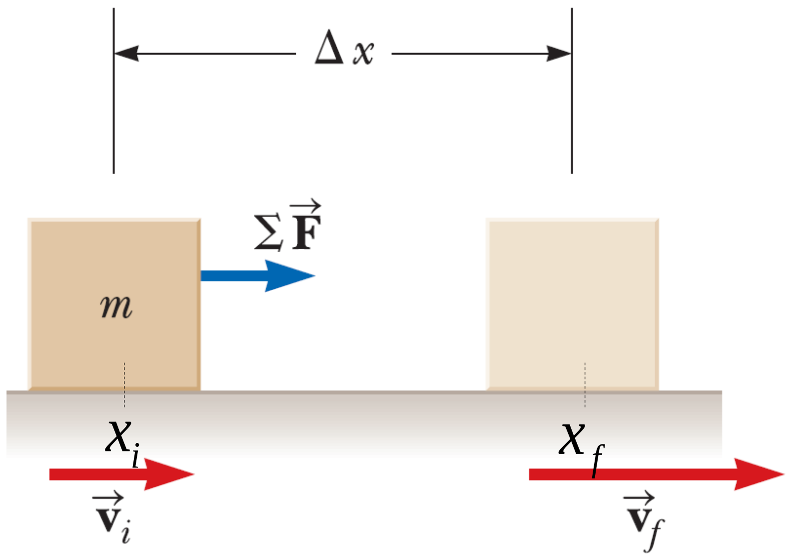
$$= v_x \frac{dv_x}{dx}$$

$$W_{ext} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2,$$

$$K \equiv \frac{1}{2} m v^2$$: 입자의 운동에너지(Kinetic Energy)

(스칼라량) 단위: $1J = 1N \cdot m = kg \cdot m^2 / s^2$

운동에너지와 일-운동에너지 정리



$$W_{ext} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2, \quad K \equiv \frac{1}{2}mv^2$$

$$= K_f - K_i$$

$$= \Delta K$$

$W_{ext} = \Delta K$: 일-운동에너지 정리
(Work-Kinetic Energy Theorem)

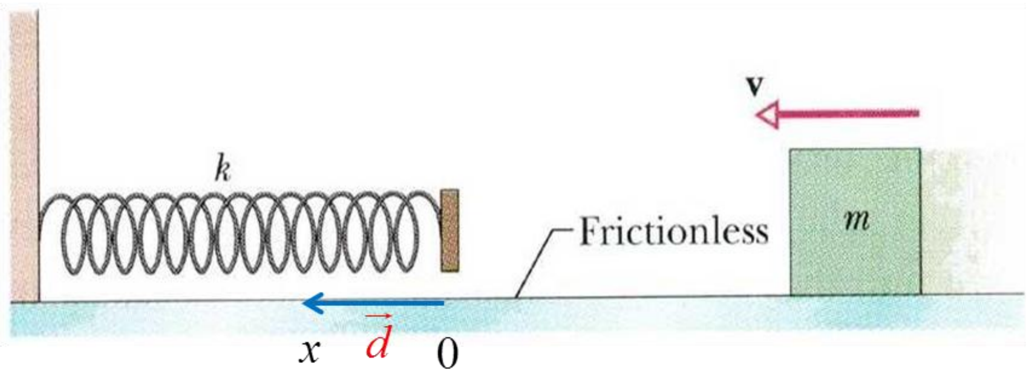
- 알짜힘이 그 계에 한 일은 계의 운동에너지 변화와 같다.
  (단, 알짜힘이 계에 일을 한 변화가 속력뿐인 경우)

- 알짜힘이 계에 양의 일을 하면 계의 운동에너지는 증가하고, 음의 일을 하면 계의 운동에너지는 감소한다.

- 일-운동 에너지 정리의 ΔK는 두 점 사이의 경로에 무관하고 처음과 나중의 속력에만 의존한다.

표본문제

- 질량이 5.7kg인 나무토막이 1.2m/s 속력으로 미끄러져 용수철과 충돌한다. 그 때 용수철의 최대 압축길이는 얼마인가? 단, 용수철 상수 k=1500N/m이고 바닥과의 마찰력은 없다.



- 나무토막에 일-운동에너지 정리를 적용하면

$$W_s = \Delta K$$

- 용수철이 한 일과 운동에너지 변화는

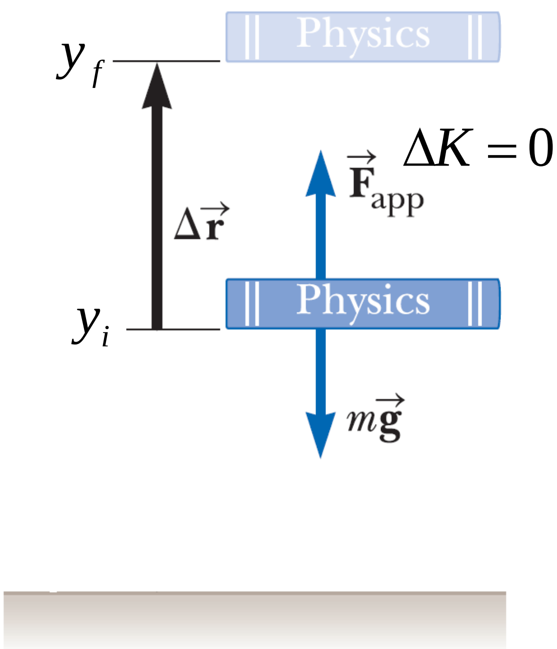
$$W_s = \frac{1}{2}kx_0^2 - \frac{1}{2}kx^2 = -\frac{1}{2}kd^2, \;\; \Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\therefore \Delta K = W_s \rightarrow -\frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{1}{2}kd^2,$$

$$\therefore d = v_0\sqrt{\frac{m}{k}} = 1.2m/s \times \sqrt{\frac{5.7kg}{1500N/m}} = 7.4\times 10^{-2}m = 7.4cm$$

계의 위치 에너지

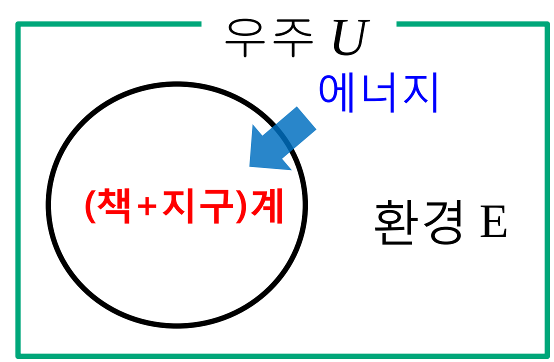
▪ 여러 개의 입자나 물체로 구성된 계에서 구성요소들이 내력에 의해 서로 상호 작용하는 경우를 생각해본다.



▪ 이러한 계의 총 운동에너지는 계를 구성하는 요소들의 운동에너지의 대수적합이다.

▪ 편의상 (책+지구)계를 고려하고 지구의 운동에너지는 상대적으로 무시한다.

▪ (책+지구)계에서 외력이 양의 일을 하므로 계로 에너지를 전달하고 계의 에너지가 증가해야 한다. 그러나 계의 총 운동에너지는 0이다??



▪ 외력이 한 일은 (책+지구)계의 다른 형태의 에너지로 저장되어야 한다.

▪ 책을 놓으면 책은 운동 에너지를 가지므로 (책+지구)계에는 운동에너지로 바뀔 수 있는 잠재적인 에너지가 있으며 이러한 에너지 저장 형태를 위치 에너지(potential energy)라 한다.

▪ 위치 에너지의 크기는 계를 구성하는 요소들의 배열 상태에 따라 결정된다

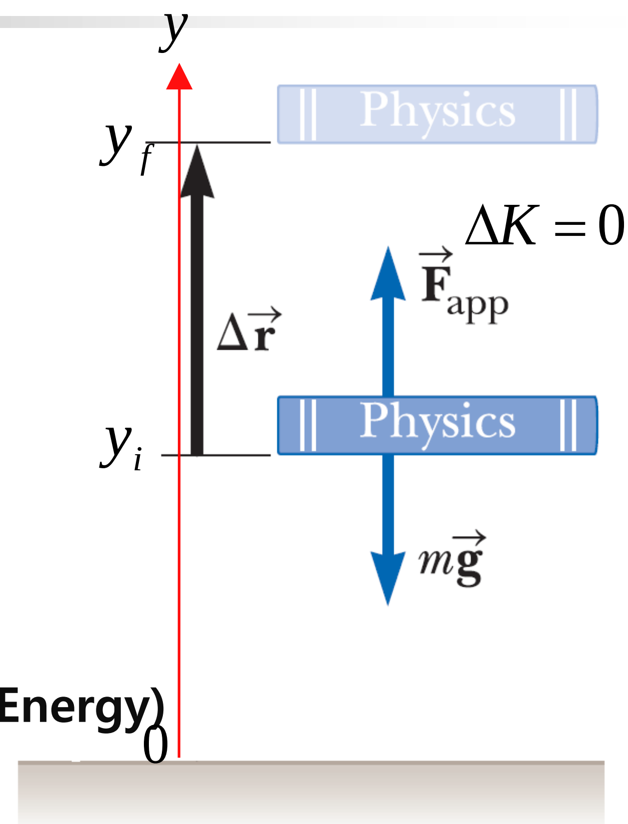
중력 위치에너지(지표면 근처)

- **(책+지구)로 구성된 계**에 대해 외력이 한 일은

$$W_{ext} = \int_i^f \vec{F}_{app} \cdot d\vec{r}, \qquad \boxed{\begin{aligned} &\vec{F}_{app} + m\vec{g} = 0, \\ &\vec{g} = -g\,j,\ \ d\vec{r} = dy\,j \end{aligned}}$$

$$= -\int_i^f m\vec{g} \cdot d\vec{r},$$

$$= \int_{y_i}^{y_f} mg\ dy = \left[mgy\right]_{y_i}^{y_f} = mgy_f - mgy_i$$



$U_g \equiv mgy$: 중력위치에너지(Gravitational Potential Energy)

(스칼라량) 단위: $1J = 1N \cdot m = kg \cdot m^2 / s^2$

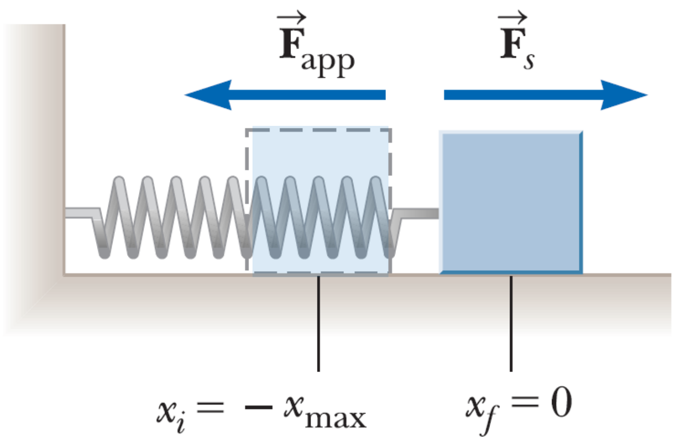
$$W_{ext} = \Delta U_g = -W_g,$$

- **위치에너지의 차이만이 물리적으로 의미가 있으며, 항상 임의의 기준점을 위치 에너지가 0이 되도록 정할 수 있다.**

$$\Delta U_g = U_g(y) - U_g(0) = mgy \quad \therefore U_g(y) = mgy,\ U_g(0) = 0$$

탄성 위치에너지

- **(용수철+물체)로 구성된 계**에 대해 외력이 한 일은



$$\boxed{W_{ext} = -W_s = \tfrac{1}{2}kx_f^{\,2} - \tfrac{1}{2}kx_i^{\,2}}$$

$$U_s \equiv \frac{1}{2}kx^2$$ **: 탄성 위치에너지 (Elastic Potential Energy)**

(스칼라량) 단위: $1J = 1N \cdot m = kg \cdot m^2 / s^2$

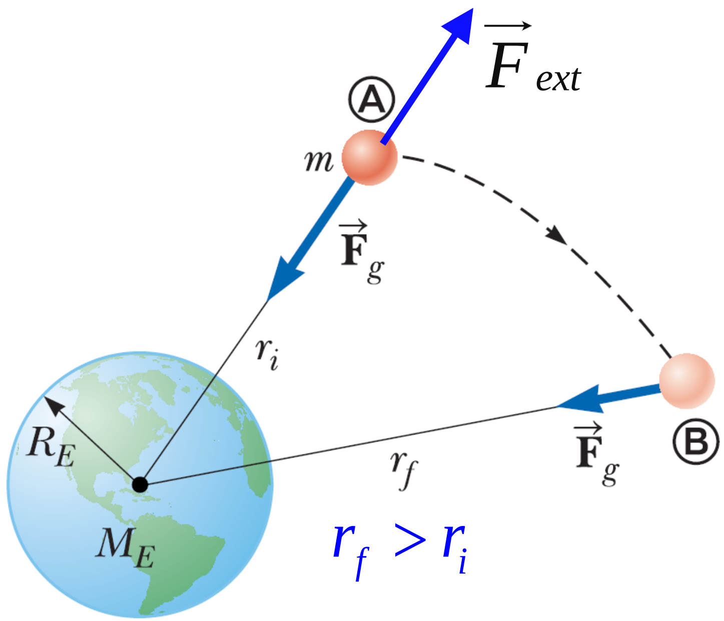
$$W_{ext} = \Delta U_s = -W_s$$

- **위치에너지의 차이만이 물리적으로 의미가 있으며, 항상 임의의 기준점을 위치에너지가 0이 되도록 정할 수 있다.**

$$\Delta U_s = U_s(x) - U_s(0) = \frac{1}{2}kx^2 \quad \therefore U_s(x) = \frac{1}{2}kx^2,\ U_s(0) = 0$$

중력 위치에너지

- **(지구+입자)로 구성된 계**에 대해 외력이 한 일은



$$r_f > r_i$$

$$\vec{F}_g = -\frac{GM_E m}{r^2}\hat{r}$$

$$\boxed{\vec{F}_{ext} + \vec{F}_g = 0, \quad d\vec{r} = dr\ \hat{r} + ..}$$

$$W_{ext} = \int_i^f \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{r}$$

$$= -\int_i^f \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = -\int_{r_i}^{r_f} \frac{GM_E m}{r^2} dr$$

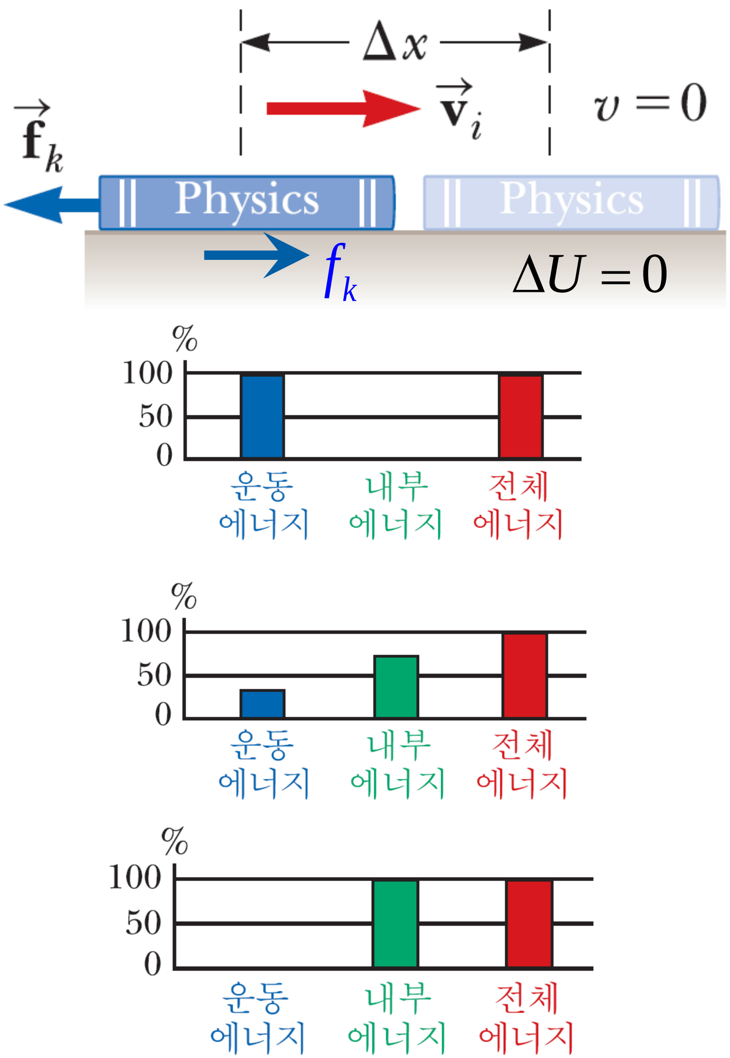
$$= \left[\frac{GM_E m}{r}\right]_{r_i}^{r_f} = \frac{GM_E m}{r_f} - \frac{GM_E m}{r_i}$$

$$U_g \equiv \frac{GM_E m}{r}$$ **: 중력위치에너지(Gravitational Potential Energy)**

$$W_{ext} = \Delta U_g = -W_g,$$

$$\Delta U_g = U_g(\infty) - U_g(r) = -\frac{GM_E m}{r} \quad \therefore U_g(r) = -\frac{GM_E m}{r}, \quad U_g(\infty) = 0$$

보존력과 비보존력: 내부에너지



- 마찰력이 내력으로 작용하는 (책+표면)계를 생각해본다.

- 마찰력이 책에 한 일은 음이고 탁자표면에 한 일은 0이다.

- (책+표면)계에서 마찰력은 내력이므로 계 내에서 에너지는 새로이 생성되거나 소멸되지 않는다. 그럼 운동에너지는 어디로 갔을까?

- 이 경우 책과 탁자 표면이 다소 따뜻해졌으며, **계의 온도와 연관된 에너지를 내부 에너지(internal energy)**라고 하고, E_{int} 로 나타낸다.

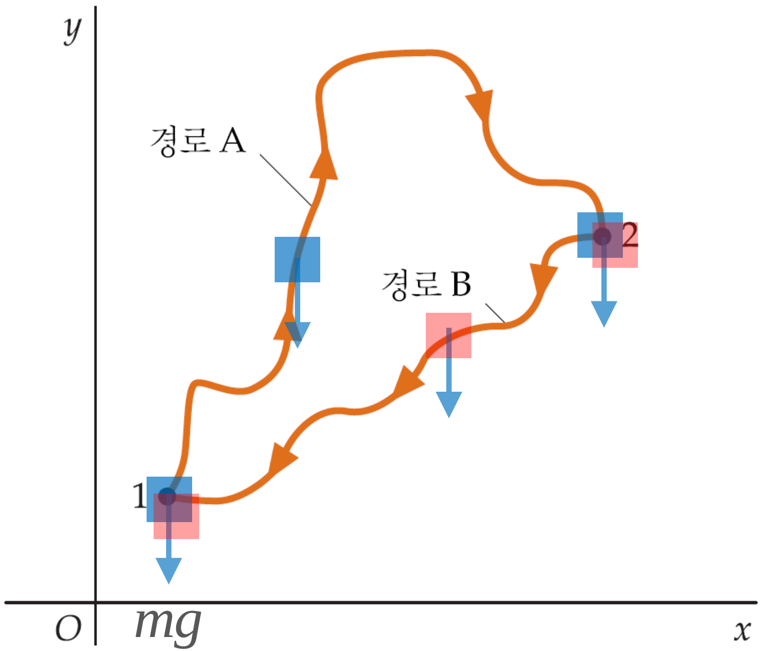
- 중력이 물체에 한 일은 연직으로 떨어지거나 경사면을 미끄러지거나 하는 중간 과정에 의존하지 않는다. 중요한 것은 물체의 고도 변화이다. 그러나 **마찰에 의한 내부 에너지로의 변환은 같은 변위라도 물체가 미끄러지는 거리에 의존한다.**

- 이러한 경로 의존성에 따라 힘을 **보존력**과 **비보존력**으로 구분한다.

보존력과 비보존력

▪ **보존력(Conservative forces)의 정의 :** 폐경로를 따라 이동하는 입자에 보존력이 한 일은 영이다.

• 결과: 두 점 사이를 이동하는 입자에 보존력이 한 일은 이동 경로와 무관하다.



▪ 일반적으로 계의 구성 요소 중 한 물체가 한 점에서 다른 점으로 이동할 때, 보존력이 한 일 W_c는 계의 위치 에너지의 처음 값에서 나중 값을 뺀 것과 같다.

$$W_{ext} = \Delta U_g = -W_g$$: 중력위치에너지(지표면근처)

$$W_{ext} = \Delta U_g = -W_g$$: 뉴턴의 중력위치에너지

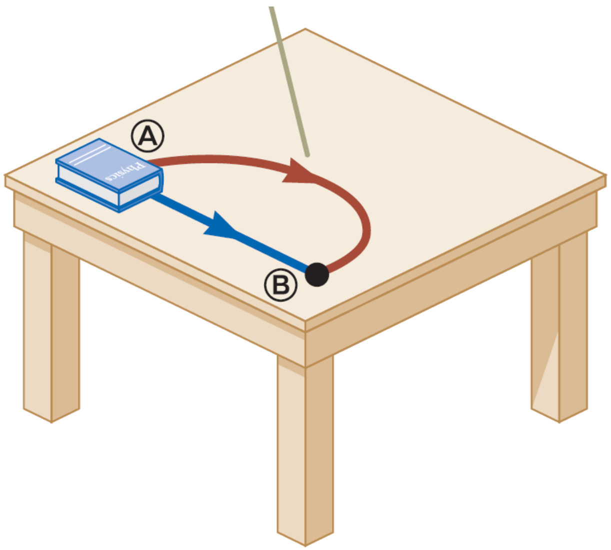
$$W_{ext} = \Delta U_s = -W_s$$: 탄성 위치에너지

▪ 보존력이 한일은 위치에너지 감소와 같다. $\Delta U = -W_c$

보존력과 비보존력

- **비보존력(Nonconservative Forces)**

- 보존력에 대한 성질을 만족하지 못하는 힘을 비보존력이라고 한다.
마찰력이 대표적인 비보존력이다.



- 역학적 에너지(mechanical energy):
계의 운동 에너지와 위치 에너지의 합으로 정의한다.

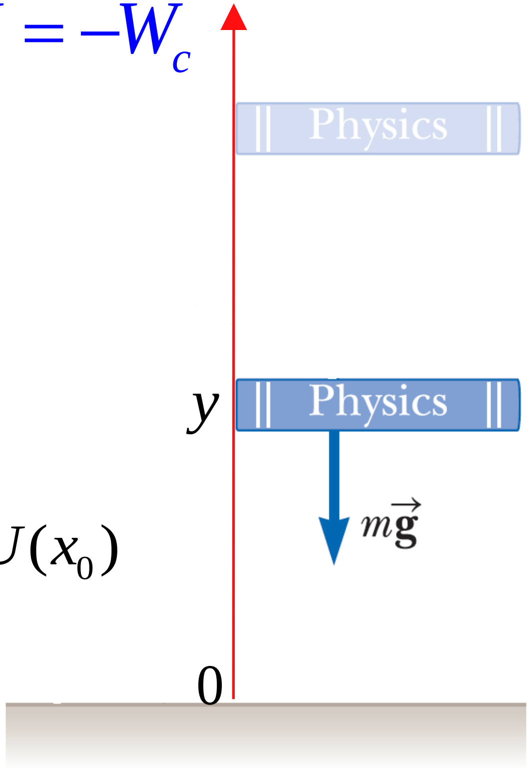
$$E_{mech} \equiv K + U$$

- 계 내부에서 작용하는 비보존력은 역학적 에너지의 변화를 초래한다.

$$\Delta E_{mech} \neq 0$$

보존력과 위치에너지의 관계

- **보존력 F가 한 일은 위치에너지의 변화와 반대이다.** $\Delta U = -W_c$



- **1차원에서**

$$W_c = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx,$$

$$\Delta U = U_f - U_i = -\int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

- **보존력을 이용하여 위치 에너지를 다시 결정할 수 있다.**

$x_f \to x,\ U_f \to U(x)$: $x_i \to x_0$: 기준점, $U_i \to U_0 = U(x_0)$

$$\boxed{U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^{x} F_x dx}$$

- **지표면 근처에서의 중력 위치에너지를 구해본다.**

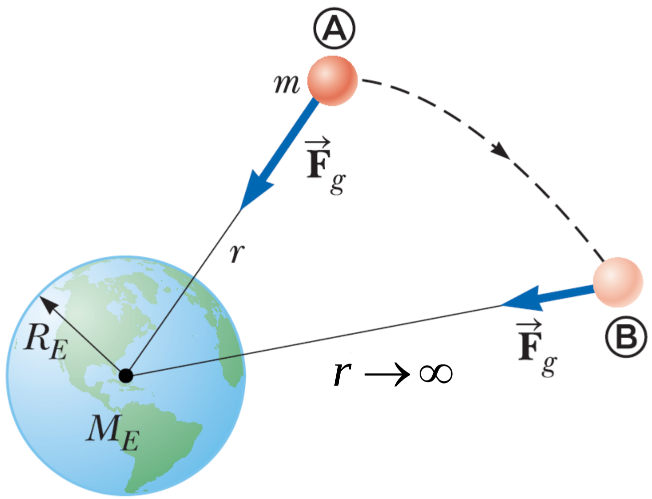
$$U(y) - U(0) = -\int_0^y (-mg)dy = mgy$$

$$\therefore U(y) = mgy \ \ with\ U(0) = 0$$

중력 위치에너지(Gravitational Potential Energy)

▪ **(지구+입자)로 구성된 계**에 대해 보존력인 중력이 한 일은 위치에너지의 변화와 반대이다.

$$\Delta U = -W_c \rightarrow U_f - U_0 = -\int_{x_0}^{x} F_x dx$$



$$U(\infty) - U(r) = -\int_r^{\infty} F_g(r) dr,\ d\vec{r} = dr\ \hat{r} + ..$$

$$\therefore U(r) - U(\infty) = \int_r^{\infty} F_g(r) dr$$

$$= -\int_r^{\infty} \frac{GM_E m}{r^2} dr$$

$$= \left[\frac{GM_E m}{r} \right]_r^{\infty}$$

$$= -\frac{GM_E m}{r}$$

$$\vec{F}_g = -\frac{GM_E m}{r^2} \hat{r},$$

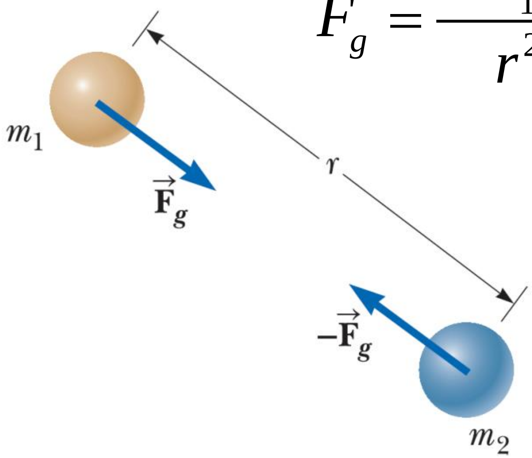
$\hat{\mathbf{r}}$: 지구로부터 입자를 향하는 단위 벡터

$$U_g(r) = -\frac{GM_E m}{r} \quad with\ U(\infty) = 0$$

중력 위치에너지(Gravitational Potential Energy)

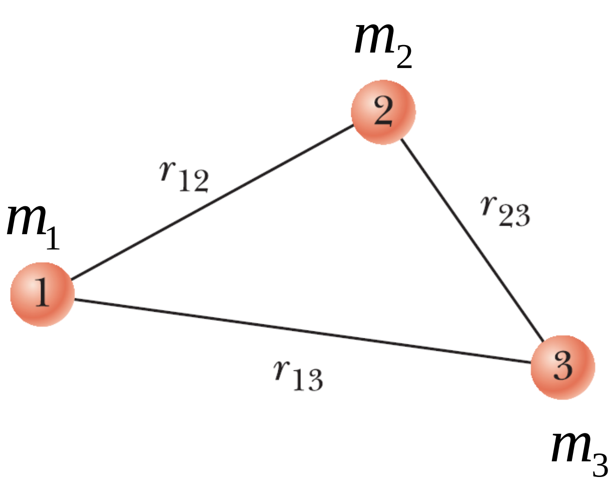
- 두 입자계의 중력 위치에너지: 한 입자를 기준으로 다른 입자를 거리 r에서 무한대까지 가져갈 때 중력이 한 일을 통하여 위치에너지를 계산한다.

$$F_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$



$$U_g = -\frac{Gm_1m_2}{r} \quad with\ U(\infty) = 0$$

- 세 입자계의 중력 위치에너지는 상호작용하는 입자들간의 위치에너지의 합이다.



$$U_{total} = U_{12} + U_{23} + U_{31}$$

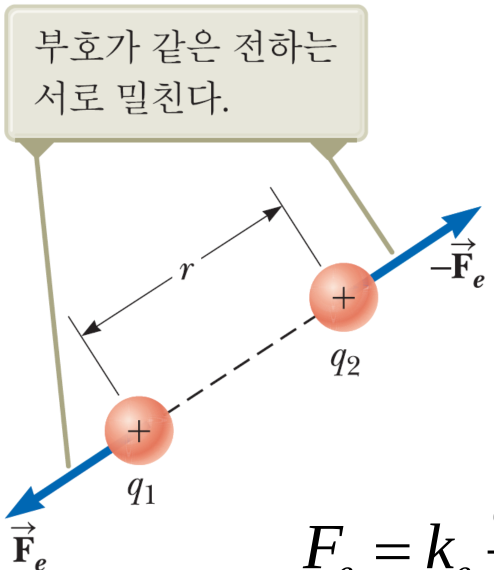
$$= -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} - \frac{Gm_2m_3}{r_{23}} - \frac{Gm_3m_1}{r_{31}}$$

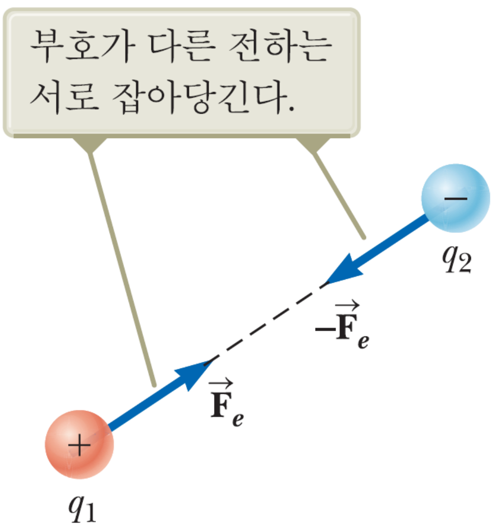
$$with\ U(\infty) = 0$$

전기 위치에너지(Electric Potential Energy)

▪ 두 전하로 구성된 계의 전기 위치에너지: 두 전하 사이에 작용하는 전기력은 쿨롱의 법칙을 따른다.

$$U_g = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$





$$F_e = k_e \frac{q_1q_2}{r^2}$$

$$U_e = -\frac{k_e|q_1||q_2|}{r}$$

(다른 부호일 때: 인력)

$$U_e = \frac{k_e|q_1||q_2|}{r}$$

(같은 부호일 때: 척력)

$$U_e = \frac{k_eq_1q_2}{r}$$

: 두 전하계의 전기 위치에너지(무한대가 기준점)

보존력과 위치에너지의 관계

- 보존력과 위치에너지의 관계를 이용하여 위치에너지 변화로부터 보존력을 얻어 낼 수도 있다.

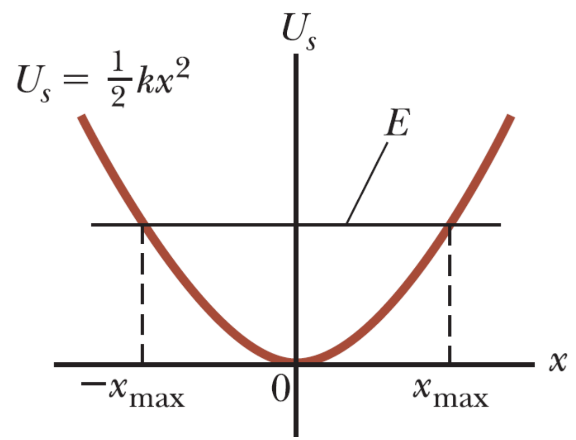
$$\Delta U = -W_c, \quad \Delta U = -\int_{x_0}^{x} F_x dx$$

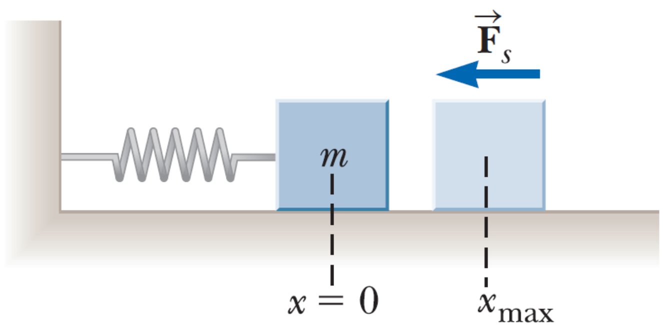
- 만약 힘의 작용점이 미소 변위 ***dx*** 만큼 움직인다면, 계의 미소 위치 에너지 변화 ***dU*는**

$$dU = -F_x dx \;\Rightarrow\; F_x = -\frac{dU}{dx}$$

- (용수철+물체)계의 위치에너지는 $U_s = \frac{1}{2}kx^2$

$$F_s = -\frac{dU_s}{dx} = -kx$$





- 위치에너지 곡선의 기울기가 보존력의 크기에 대응한다. 기울기가 0인 점은 힘이 작용하지 않는 평형점에 해당한다.