

Newton-Euler Formulation

KITECH 양광웅 작성

Page365@gmail.com

뉴턴 오일러 공식을 이용하면, 운동방정식은 두 단계의 반복적인 절차로 구할 수 있다. 베이스에서 말단장치까지의 속도와 가속도의 전파를 위한 순회귀(forward recursion)와 말단장치에서 베이스까지의 힘과 모멘트의 전파를 위한 역회귀(backward recursion)이 그것이다.

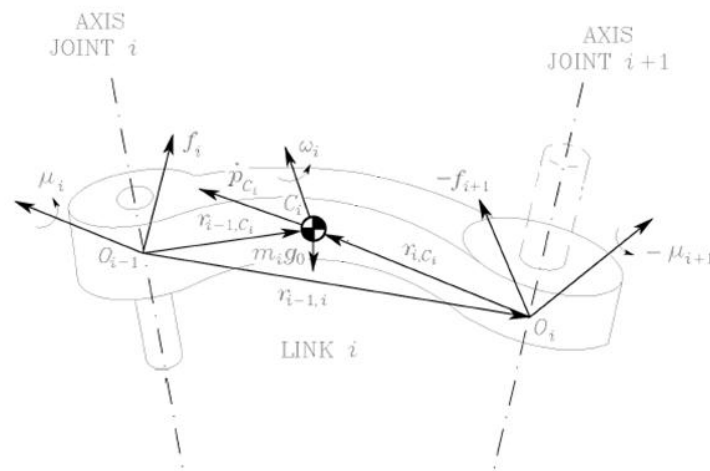


그림 3에서, 뉴턴 방정식에 따라 augmented 링크의 힘의 균형을 아래 식으로 표현할 수 있다.

$$f_i = f_{i+1} + m_i(\ddot{p}_c - g_0)$$

f_i 와 $-f_{i+1}$ 는 각각 이전 링크와 다음 링크간의 연결에 의해 링크 i 에 가해진 힘의 합을 나타낸다. augmented 링크의 모멘트의 균형은 아래의 오일러 방정식으로 표현할 수 있다.

$$\mu_i = -f_i \times (r_{i-1,i} + r_{i,c_i}) + \mu_{i+1} + f_{i+1} \times r_{i,c_i} + \frac{dk_i}{dt}$$

μ_i 와 $-\mu_{i+1}$ 는 각각 이전 링크와 다음 링크간의 연결에 의해 링크 i 에 가해진 모멘트의 합이고, $i-1$ 과 i 프레임의 원점에 대하여 계산한다. 또한, k_i 는 무게 중심점에 대해서 링크 i 의 각운동량(angular momentum)이다.

$$k_i = \bar{I}_i \omega_i$$

따라서,

$$\mu_i = -f_i \times (r_{i-1,i} + r_{i,c_i}) + \mu_{i+1} + f_{i+1} \times r_{i,ci} + \bar{I}_i \dot{\omega}_i + \omega_i \times (\bar{I}_i \dot{\omega}_i)$$

i 번째 관절에 걸리는 일반화된 힘은

$$\tau_i = \begin{cases} f_i^T z_{i-1} & \text{for a prismatic joint} \\ \mu_i^T z_{i-1} & \text{for a revolute joint} \end{cases}$$

위 식들은 링크들의 속도와 가속도값을 필요로 한다. i 번째 링크의 각속도, 선속도는 각각,

$$\omega_i = \begin{cases} \omega_{i-1} & \text{for a prismatic joint} \\ \omega_{i-1} + \dot{v}_i z_{i-1} & \text{for a revolute joint} \end{cases}$$

$$\dot{p}_i = \begin{cases} \dot{p}_{i-1} + \dot{d}_i z_{i-1} + \omega_i \times r_{i-1,i} & \text{for a prismatic joint} \\ \dot{p}_{i-1} + \omega_i \times r_{i-1,i} & \text{for a revolute joint} \end{cases}$$

위 식에서 i 번째 링크의 가속도는 아래의 식으로 구할 수 있다.

$$\dot{\omega}_i = \begin{cases} \dot{\omega}_{i-1} & \text{for a prismatic joint} \\ \dot{\omega}_{i-1} + \ddot{v}_i z_{i-1} + \dot{v}_i \omega_{i-1} \times z_{i-1} & \text{for a revolute joint} \end{cases}$$

$$\ddot{p}_i = \begin{cases} \ddot{p}_{i-1} + \ddot{d}_i z_{i-1} + 2\dot{d}_i \omega_i \times z_{i-1} + \dot{\omega}_i \times r_{i-1,i} + \omega_i \times (\omega_i \times r_{i-1,i}) & \text{for a prismatic joint} \\ \ddot{p}_{i-1} + \dot{\omega}_i \times r_{i-1,i} + \omega_i \times (\omega_i \times r_{i-1,i}) & \text{for a revolute joint} \end{cases}$$

마지막으로, i 번째 augmented 링크의 무게중심의 가속도는,

$$\ddot{p}_{c_i} = \ddot{p}_i + \omega_i \times r_{i,ci} + \omega_i \times (\omega_i \times r_{i,ci})$$

모든 벡터들이 링크 i 의 현재 프레임에 작용되는 것이라면 반복법은 수치계산적으로 더 효율적이다. 이것은 $i-1$ 프레임에서 i 프레임까지 변환되어야 하는 모든 벡터에 R_i^{i-1T} 가 곱해져야 한다는 것이므로, $i+1$ 프레임에서 i 프레임까지 변환 되어야 하는 모든 벡터에 회전 행렬 R_{i+1}^i 가 곱해야 한다는 의미이다. 따라서, 위 식들은 아래처럼 쓸 수 있다.

순회귀(forward recursion)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_i^i &= \begin{cases} \mathbf{R}_i^{i-1T} \boldsymbol{\omega}_{i-1}^{i-1} & \text{for a prismatic joint} \\ \mathbf{R}_i^{i-1T} (\boldsymbol{\omega}_{i-1}^{i-1} + \dot{\mathcal{J}}_i \mathbf{z}_0) & \text{for a revolute joint} \end{cases} \\
\dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i &= \begin{cases} \mathbf{R}_i^{i-1T} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1}^{i-1} & \text{for a prismatic joint} \\ \mathbf{R}_i^{i-1T} (\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1}^{i-1} + \ddot{\mathcal{J}}_i \mathbf{z}_0 + \dot{\mathcal{J}}_i \boldsymbol{\omega}_{i-1}^{i-1} \times \mathbf{z}_0) & \text{for a revolute joint} \end{cases} \\
\ddot{\mathbf{p}}_i^i &= \begin{cases} \mathbf{R}_i^{i-1T} (\ddot{\mathbf{p}}_{i-1}^{i-1} + \ddot{d}_i \mathbf{z}_0) + 2\dot{d}_i \boldsymbol{\omega}_i^i \times \mathbf{R}_i^{i-1T} \mathbf{z}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i \times \mathbf{r}_{i-1,i}^i + \boldsymbol{\omega}_i^i \times (\boldsymbol{\omega}_i^i \times \mathbf{r}_{i-1,i}^i) & \text{for a prismatic joint} \\ \mathbf{R}_i^{i-1T} \ddot{\mathbf{p}}_{i-1}^{i-1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i \times \mathbf{r}_{i-1,i}^i + \boldsymbol{\omega}_i^i \times (\boldsymbol{\omega}_i^i \times \mathbf{r}_{i-1,i}^i) & \text{for a revolute joint} \end{cases} \\
\ddot{\mathbf{p}}_{C_i}^i &= \ddot{\mathbf{p}}_i^i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i \times \mathbf{r}_{i,C_i}^i + \boldsymbol{\omega}_i^i \times (\boldsymbol{\omega}_i^i \times \mathbf{r}_{i,C_i}^i)
\end{aligned}$$

역회귀(backward recursion)

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_i^i &= \mathbf{R}_{i+1}^i \mathbf{f}_{i+1}^{i+1} + m_i \ddot{\mathbf{p}}_{C_i}^i \\
\boldsymbol{\mu}_i^i &= -\mathbf{f}_i^i \times (\mathbf{r}_{i-1,i}^i + \mathbf{r}_{i,C_i}^i) + \mathbf{R}_{i+1}^i \boldsymbol{\mu}_{i+1}^{i+1} + \mathbf{R}_{i+1}^i \mathbf{f}_{i+1}^{i+1} \times \mathbf{r}_{i,C_i}^i + \bar{\mathbf{I}}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i + \boldsymbol{\omega}_i^i \times (\bar{\mathbf{I}}_i \boldsymbol{\omega}_i^i) \\
\tau_i &= \begin{cases} \mathbf{f}_i^{iT} \mathbf{R}_i^{i-1T} \mathbf{z}_0 \\ \boldsymbol{\mu}_i^{iT} \mathbf{R}_i^{i-1T} \mathbf{z}_0 \end{cases}
\end{aligned}$$

위 식들에서 $\bar{\mathbf{I}}_i^i, \mathbf{r}_{i,C_i}^i$ 는 상수라는 이점을 가지고 있다. 더군다나 $\mathbf{z}_0 = [0 \ 0 \ 1]^T$ 이다.

요약하면, 관절의 위치, 속도, 가속도를 구하기 위해 반복적 계산 알고리즘은 아래의 두가지 관점에서 수행될 수 있다.

- $\boldsymbol{\omega}_0^0, \dot{\mathbf{p}}_0^0 - \mathbf{g}_0^0$,과 $\dot{\boldsymbol{\omega}}_0^0$ 의 초기조건(initial condition)을 알면, $(i=1, \dots, n)$ 일때, $\boldsymbol{\omega}_i^i, \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i, \ddot{\mathbf{p}}_i^i, \ddot{\mathbf{p}}_{C_i}^i$ 를 계산하는데 위 식들을 사용한다.
- $\mathbf{f}_{n+1}^{n+1}$ 과 $\boldsymbol{\mu}_{n+1}^{n+1}$ 의 말기조건(terminal condition)을 알면, $(i=1, \dots, n)$ 일때, $\mathbf{f}_i^i, \boldsymbol{\mu}_i^i$ 와 τ_i 를 계산하는데 위 식들을 사용한다.

뉴턴 오일러 공식의 순회귀(forward recursion)와 역회귀(backward recursion) 과정을 수행하는 함수를 다음과 같이 정의하자. RNE($\cdot$) 함수는 관절의 위치 $\mathbf{q}$, 속도 $\dot{\mathbf{q}}$, 가속도 $\ddot{\mathbf{q}}$ 를 알고 초기조건 $\mathbf{g}$ 를 알 때 관절의 토크 $\boldsymbol{\tau}$ 를 계산한다.

$$\boldsymbol{\tau} = \text{RNE}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{g})$$

Inverse Dynamics

Inverse dynamics는 관절의 위치 $\mathbf{q}$, 속도 $\dot{\mathbf{q}}$, 가속도 $\ddot{\mathbf{q}}$ 를 알 때 관절에 작용하는 토크 $\boldsymbol{\tau}$ 를 계산하는 과정이다. 이때, 토크는 다음과 같이 마찰력을 고려하여 계산할 수 있다.

$$\boldsymbol{\tau} = \text{RNE}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{g}) + F_v \dot{\mathbf{q}} + F_s \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}})$$

여기서, F_v 는 viscous friction 이고, F_s 는 Coulomb friction 이다. $\text{sgn}(\cdot)$ 함수는 양수일 때 1을, 음수일 때 -1의 값을 돌려준다. $\mathbf{g}$ 는 중력가속도로, 보통 $\mathbf{g} = [0 \ 0 \ -9.81]^T$ 로 설정한다.

Forward Dynamics

Forward dynamics는 관절의 위치 $\mathbf{q}$, 속도 $\dot{\mathbf{q}}$, 토크 $\boldsymbol{\tau}$ 를 알 때 관절의 가속도 $\ddot{\mathbf{q}}$ 를 계산하는 과정이다.

먼저, 적분의 정확성을 높이기 위해 4차 Runge-Kutta 방법을 사용하여 적분한다.

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \\ t_{n+1} &= t_n + \Delta t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_1 &= \Delta t \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{k}_2 &= \Delta t \mathbf{f}(t_n + 0.5\Delta t, \mathbf{y}_n + 0.5\mathbf{k}_1) \\ \mathbf{k}_3 &= \Delta t \mathbf{f}(t_n + 0.5\Delta t, \mathbf{y}_n + 0.5\mathbf{k}_2) \\ \mathbf{k}_4 &= \Delta t \mathbf{f}(t_n + \Delta t, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_3)\end{aligned}$$

위 방정식에서 $\mathbf{y} = [\mathbf{q} \ \dot{\mathbf{q}}]^T$ 이고 t 는 위 식에서는 사용되지 않는다. 식 $\mathbf{f}(\cdot)$ 는 아래와 같이 $\ddot{\mathbf{q}}$ 를 계산하여 $[\dot{\mathbf{q}} \ \ddot{\mathbf{q}}]^T$ 를 돌려준다.

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q})(\boldsymbol{\tau}_d - \boldsymbol{\tau}'), \\ \boldsymbol{\tau}' &= \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + F_v \dot{\mathbf{q}} + F_s \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}}).\end{aligned}$$

여기서, F_v 는 viscous friction 이고, F_s 는 Coulomb friction 이다. $\text{sgn}(\cdot)$ 함수는 양수일 때 1을, 음수일 때 -1의 값을 가진다. $\boldsymbol{\tau}_d$ 는 로봇을 제어하기 위해 사용자가 입력한 토크다.

행렬 $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \cdots \ \mathbf{b}_n]$ 의 열 벡터 $\mathbf{b}_i$ 는 다음 식으로 계산한다.

$$\mathbf{b}_i = \text{RNE}(\mathbf{q}, \mathbf{0}, \ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{0}) \quad \text{for } i = 1, \dots, n$$

위 식에서 벡터 $\ddot{\mathbf{q}} = [q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_n]^T$ 의 j 번째 원소 $\ddot{q}_j$ 는 다음과 같다.

$$\ddot{q}_j = \begin{cases} 1 & \text{for } j \neq i \\ 0 & \text{for } j = i \end{cases} \quad \text{for } j = 1, \dots, n$$

$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$ 는 조인트의 가속도에 영향을 받지 않는 코리올리 힘과 중력에 의한 토크이다. 이 두 힘의 합은 다음과 같이 가속도가 0인 조건에서 $\text{RNE}(\cdot)$ 함수로부터 구할 수 있다.

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \text{RNE}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{0}, \mathbf{g})$$

위 식에서 $\mathbf{g}$ 는 중력가속도 $(0, 0, -9.81)^T$ 이다.